Simetrias e Leis de Conservação na Mecânica Clássica

Adriano de Souza Martins*
Dep. de Física do Estado Sólido - UFRJ
Cx. Postal 68528, CEP 21945-970, (Rio de Janeiro)

Recebido em 26 de Junho, 1998

A conexão entre leis de conservação e simetrias do sistema são analisadas dentro do formalismo lagrangeano. Após uma breve exposição dos conceitos acima citados, apresentaremos a conexão entre estes sob o ponto de vista do teorema de Noether, cuja dedução será apresentada. Discutiremos uma ampliação deste teorema, de modo a incluir a variação de calibre das lagrangeanas, de modo a lançar luz em novas simetrias do sistema.

The connection between conservation laws and symmetries properties of physical systems are showed in Lagrangian formalism. After a short exposition of symmetries and conserved quantities concepts, we will explore their connection in the Noether Theorem frame. We also discuss one ampliation of this theorem to include the gauge variant Lagrangians.

I Introdução

O estudo das propriedades de simetria de um sistema nos dá preciosas informações sobre o mesmo, como a forma de suas soluções (Teorema de Bloch), redução de graus de liberdade, etc.... Dentro deste contexto, quero examinar o papel das simetrias dentro do formalismo lagrangeano da mecânica e sua relação com quantidades físicas conservadas, sob o ponto de vista do teorema de Noether. Este teorema, de grande importância e riqueza, quase não é tratado nos cursos convencionais de mecânica clássica, apesar de sua forma simples. Historicamente, a conexão entre leis de conservação e simetrias foi investigada primeiramente por Schütz[6] no caso de simetria translacional. Uma formulação mais precisa é dada pelo teorema de Noether[5], que estabelece o elo entre as leis de conservação e as transformações do grupo de Galilei.

O que pretendo neste texto é apresentar uma espécie de revisão dos conceitos de simetrias na física clássica e sua conexão com a conservação de quantidades físicas, sob o ponto de vista do Teorema de Noether. Este Teorema é pouco comentado em livros didáticos, apesar de sua aparente popularidade. Com vista a enriquecer mais a discussão, veremos como estender a aplicabilidade do teorema de Noether de modo a incluir o fato que lagrangeanas que diferem por uma derivada total no tempo de uma função são equivalentes, ou seja, descrevem o mesmo sistema físico[4]. A seguir apresentarei um breve resumo dos conceitos de simetria e leis de conservação, com as respectivas analogias entre os formalismos Newtoniano e lagrangeano.

II Simetrias

O termo simetria em Física refere-se a um conjunto de transformações definidas num grupo que levam uma expressão ser invariante na sua forma: dizemos então que o sistema é invariante sob aquela transformação ou que ele apresenta uma simetria no parâmetro da transformação. As operações aqui serão aquelas definidas no grupo de Galilei, pois tudo que aqui será analisado será dentro do limite não relativístico. Vamos tomar o formalismo Newtoniano como exemplo:

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U_i(\mathbf{r}_i), \tag{2}$$

*e-mail: asm@if.ufrj.br

para forças deste tipo, as equações de movimento do tipo 1, são invariantes sob transformações de Galilei do tipo:

$$t' = t + \tau, \qquad \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\alpha} + \vec{\gamma}\, t \tag{3}$$

Aqui, ao referir-me ao termo invariância, estarei me referindo a invariância da lagrangeana sob operações de deslocamento em suas coordenadas generalizadas, não em sua equação de movimento. Como ilustração basta lembrarmos que sempre associa-se a conservação do momento linear a translações espaciais e da energia a translações temporais. Mas esta invariância refere-se a lagrangeana L que descreve o sistema, pois uma partícula submetida a uma força friccional movendo-se segundo a equação

$$m\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -k\frac{\partial r}{\partial t} \tag{4}$$

não conserva momento nem energia, apesar desta equação ser invariante sob translações temporais e espaciais. Vemos assim que não existe uma relação biunívoca entre as simetrias da equação de movimento com as da lagrangeana L. Para uma discussão mais aprofundada, sugiro a leitura do artigo do Havas[2].

III Leis de Conservação

Na mecânica clássica, uma grandeza física G é conservada se:

$$\frac{dG}{dt} = 0 \tag{5}$$

O termo conservação é utilizado aqui no sentido que uma particular expressão que caracteriza um sistema, efetuada num instante t_0 , é independente de de t, ou seja, é uma constante de movimento. Na mecânica newtoniana, se temos um sistema de partículas n partículas, a força sobre a i-ésima partícula na ausência de forças externas é dada por:

$$\vec{F_i} = \sum_{i\neq k}\vec{F_{ik}}, \qquad \vec{F_i} = -\nabla_i V, \tag{6}$$

Se estas forças obedecem a terceira Lei de Newton, $\vec{F_{ik}} = -\vec{F_{ki}}$, obtemos as leis de conservação usuais para um sistema de partículas:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \qquad E = \sum_i (T_i + V_i)\,; \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \qquad \vec{P} = \sum_i \vec{p_i}; \tag{8}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \qquad \vec{L} = \sum_i \vec{r_i}\times\vec{p_i}; \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = 0, \qquad \vec{G} = \sum_i m_i\vec{r_i} - \vec{P}t; \tag{10}$$

que expressam, respectivamente, a conservação da energia, do momento linear, do momento angular e do movimento do centro de massa do sistema. No formalismo lagrangeano, o sistema é descrito pela sua função lagrangeana L:

$$L = L(q, \dot{q}, t) \tag{11}$$

e as equações de movimento são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{12}$$

Se a lagrangeana L não depende explicitamente de uma coordenada q, dizemos que esta coordenada é cíclica ou ignorável. Para uma coordenada ignorável q_k:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \tag{13}$$

levando (13) para a equação (12) obtemos:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const. \tag{14}$$

Na equação acima, p_k é chamado de momento generalizado conjugado a coordenada q_k . A equação (12) expressa a conservação do momento generalizado.

IV Teorema de Noether

Vimos que a ausência explícita da dependência da lagrangeana L em uma coordenada leva a independência desta frente a uma transformação que altere o valor da variável, nos dando a conservação do momento generalizado. Pictoriamente, podemos visualisar o Teorema de Noether como uma espécie de máquina, onde entramos com a transformação de simetria na variável q_k e tiramos a grandeza conservada G:

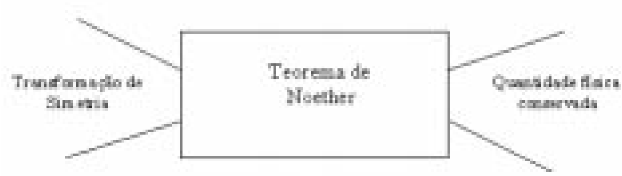

Figura 1. Estrutura pictória do Teorema (máquina) de Noether.

Para uma lagrangeana do tipo (11), o teorema de Noether é dado pela expressão

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k\right] = 0 \qquad (15)$$

A demonstração deste, assim como as condições necessárias para a sua dedução estão no apêndice deste texto. Sugiro sua leitura para a melhor compreensão não só da conexão que queremos explorar, assim como da extensão que se faz a este teorema de modo a se levar em conta a variação das lagrangeanas frente a transformações de calibre.

A. Translação temporal

Uma translação temporal é definida como

$$\widetilde{t} = t - \delta t_0, \quad \delta q_k = 0 \qquad (16)$$

Levando estas transformações para o teorema (15) teremos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = 0 \rightarrow E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = const., \qquad (17)$$

onde a constante E resulta ser a energia total do sistema. Veremos no apêndice uma extensão do teorema de Noether que permitirá obter a conservação da energia e de outra quantidades não previstas pela forma *padrão* do teorema.

B. Translação espacial

A mais simples transformação de simetria neste caso é a translação da origem de um sistema cartesiano ao longo de apenas uma das três direções que o forma. Escolhendo o eixo x no qual a translação é feita:

$$\widetilde{t} = t, \quad \widetilde{x} = x - \delta x_0, \quad \widetilde{y} = y, \quad \widetilde{z} = z \qquad (18)$$

Levando estas transformações em (15) teremos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = const., \qquad (19)$$

que é a expressão usual para a conservação do momento linear ao longo da direção em que é feita a translação.

C. Rotação em torno de um eixo

Para uma rotação infinitesimal de um ângulo $\delta\theta$ em torno do eixo z de um sistema de coordenadas cartesianas, as novas coordenadas são conectadas às antigas pelas seguintes transformações

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= x + y\cdot\delta\theta, \quad \widetilde{y} = y - x\cdot\delta\theta, \quad \widetilde{z} = z \\ \widetilde{\dot{x}} &= \dot{x} + \dot{y}\cdot\delta\theta, \quad \widetilde{\dot{y}} = \dot{y} - \dot{x}\cdot\delta\theta, \quad \widetilde{\dot{z}} = \dot{z} \end{aligned} \qquad (20)$$

onde implicitamente é assumido que $\widetilde{t} = t$. Levando as expressões acima na expressão do teorema de Noether resulta que

$$\left[x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = [xp_x - yp_y] = const. \qquad (21)$$

A expressão (21) nos dá a conservação usual da componente z do momento angular. Aqui encerramos os exemplos, porém estes não se esgotam nestes poucos aqui apresentados. Vale a pena também ressaltar que há uma formulação análoga do Teorema de Noether para campos, onde ele se mostra ainda mais poderoso. Uma boa discussão desta extensão podemos encontrar num artigo devido a Hill[3].

V Leis de conservação para lagrangeanas que apresentam variação de calibre

A. Introdução

Nesta seção quero apresentar uma extensão natural da anterior. Quando um sistema físico apresenta alguma propriedade de simetria, ele é descrito por equações de movimento invariantes sob o grupo correspondente de transformações. A lagrangeana que o descreve porém não deve necessariamente o ser. Na demonstração do Teorema de Noether, detalhada no apêndice, uma das hipóteses levada em conta foi que a lagrangeana deveria ter a mesma forma funcional após as transformações de simetria, ou seja:

$$\delta L = L(q, \dot{q}, t) - \widetilde{L}\left(\widetilde{q}, \widetilde{\dot{q}}, \widetilde{t}\right) = 0 \qquad (22)$$

Com isto, exclui-se uma classe de sistemas cujas lagrangeanas são ditas variantes de calibre[4] . Dizemos que uma lagrangeana sofre uma variação de calibre se ao realizarmos sobre a mesma uma transformação de simetria, ela variar apenas de uma derivada total no tempo de uma função $\Lambda(q_k, t)$. Da mecânica clássica, sabemos que duas lagrangeanas que diferem apenas por uma derivada total no tempo são equivalentes. Como exemplo, vejamos o caso do campo eletromagnético. Uma partícula de massa m e carga elétrica e num campo elétrico $\overrightarrow{E}$ e magnético $\overrightarrow{B}$ é descrita pela lagrangeana

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + e\,\overrightarrow{\dot{q}} \cdot \overrightarrow{A} - eV, \tag{23}$$

onde $\overrightarrow{A}$ e V são, respectivamente, o potencial vetor e o escalar dos campos, tais que

$$\overrightarrow{E} = -\left(\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) - \nabla V \tag{24}$$

e

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A} \tag{25}$$

Sabemos da teoria eletromagnética que estes potenciais não são unicamente definidos, pois para transformações de calibre *(gauge)* do tipo

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{A} & \rightarrow & \overrightarrow{A} + \nabla\Lambda \\ V & \rightarrow & V - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t}, \end{array} \tag{26}$$

os campos, que contém a física do problema, não se alteram. Após esta transformação, a lagrangeana se transformará da seguinte forma:

$$L \rightarrow L + 2e\frac{d\Lambda}{dt}, \tag{27}$$

e como sabemos, o sistema físico é o mesmo, ou seja, as duas lagrangeanas são equivalentes.

B. Teorema de Noether Generalizado

A razão física da equivalêcia de lagrangeanas que diferem por derivadas totais no tempo de funções do tipo $\Lambda(q_k, t)$ vem do princípio de mínima ação de Hamilton. Seja uma lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$, num intervalo de tempo $t = t_1$ a $t = t_2$ o sistema move-se de tal forma que a integral de ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{28}$$

assuma o menor valor possível, ou seja, $\delta S = 0$. Assim, se duas lagrangeanas diferem entre si apenas pela derivada total de uma função $\Lambda(q_k, t)$

$$L'\left(\tilde{q}, \tilde{\dot{q}}, \tilde{t}\right) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q_k, t) \tag{29}$$

o valor da ação de L' será

$$S' = S + \left[\Lambda\left(q^{(2)}, t_2\right) - \Lambda\left(q^{(1)}, t_1\right)\right], \tag{30}$$

cuja variação $\delta S'$ também será nula.

Para um sistema com N graus de liberdade sua lagrangeana L que dependerá das N coordenadas generalizadas q_k, $\mathbf{k} = \mathbf{1}...\mathbf{N}$, de suas velocidades generalizadas $\dot{q}_k$ e possivelmente do tempo. Vamos impor agora uma transformação de coordenadas do tipo

$$\delta q_k = \varepsilon f_k(q_k, \dot{q}_k, t), \tag{31}$$

cujo efeito máximo é fazer a lagrangeana variar por uma derivada total no tempo de uma função Λ que depende apenas das coordenadas q_k e de t:

$$\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt}\Lambda(q_k, t) \tag{32}$$

Em termo das transformações (46) a variação δL da lagrangeana (omitindo o subscrito k) será

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta \dot{q}, \tag{33}$$

onde L foi assumida ser independente do tempo. Usando as equações de Lagrange, podemos reescrever (48) como:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{d}{dt}(\delta q),$$

e assim

$$\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) f\right] \tag{34}$$

Comparando com a hipótese (37) da variação de gauge da lagrangeana nós obtemos a lei de conservação

$$\frac{dF}{dt} = 0 \tag{35}$$

para a quantidade F, que será dada por

$$F \equiv \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) f_k - \Lambda(q_k, t) \tag{36}$$

O resultado (41) difere do resultado obtido anteriormente pela adição do termo Λ. Vamos a seguir ilustrar a importância deste termo para o caso de uma partícula carregada num campo eletromagnético.

1. Conservação da energia

Se a lagrangeana L não depende explicitamente do tempo t,

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \tag{37}$$

então, sua variação sob uma translação temporal infinitesimal δt

$$\delta L=\left(\frac{dL}{dt}\right)\delta t \tag{38}$$

somente virá através da variação das coordenadas

$$\delta q_k=\dot{q}_k\delta t \tag{39}$$

Se fazemos a identificação $f_k=\dot{q}_k$ e $\Lambda=L$, obtemos de ( ) a lei de conservação correspondente

$$F=\sum_k\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}_k-L=energia \tag{40}$$

2. Movimento num campo eletromagnético

Vimos que a lagrangeana de uma partícula carregada num campo eletromagnético é

$$L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+e\overrightarrow{\dot{q}}\cdot\overrightarrow{A}-eV \tag{41}$$

Vamos considerar um campo elétrico E uniforme e constante. Este campo é invariante sob translações espaciais e temporais. Escolhendo o potencial escalar da forma $V=-\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{q}$, que é temporalmente invariante. A lagrangeana associada

$$L_1=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2+e\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{q} \tag{42}$$

não é invariante sob translações espaciais $\delta q_k=\delta a$ já que

$$\delta L_1=e\overrightarrow{E}\cdot\delta\overrightarrow{a}=\frac{d}{dt}\left(e\overrightarrow{E}t\right)\cdot\delta\overrightarrow{a} \tag{43}$$

e de acordo com o teorma de Noether generalizado a expressão acima implica a conservação de

$$F\equiv m\overrightarrow{\dot{q}}-e\overrightarrow{E}t=const, \tag{44}$$

mostrando a natureza uniformemente acelerada do movimento.

VI Conclusões

Pretendo ser breve nas conclusões deste trabalho, visto que ele já representa um corpo bem definido de idéias. Expomos de uma maneira sistemática como duas idéias básicas na física, que são as de simetria e de conservação de grandezas físicas, são conectadas. Apesar de ter passado ao largo do aspecto histórico, julgo também importante enfatizar como estes conceitos foram surgindo com o tempo, que pode ser visto das diferentes formas com que os formalismos Newtoniano e Lagrangeano abordam o problema.

Do ponto de vista didático, julgo importante a abordagem deste Teorema em cursos de graduação, de forma a dar uma visão de conjunto das leis de conservação em física, tratadas muitas vezes de forma fragmentária nestes cursos, como se cada lei de conservação não guarda relações entre si. Para quem se interessa, sugiro a leitura da extensão deste teorema para o formalismo de campos, no livro do Goldstein.

Apêndice: Demonstração do Teorema de Noether

Simetria sobre transformações de coordenadas toca ao efeito de transformações infinitesimais do tipo:

$$t\rightarrow\tilde{t}=t+\delta t \tag{45}$$

$$q_k(t)\rightarrow\tilde{q}_k\left(\tilde{t}\right)=q_k(t)+\delta q_k, \tag{46}$$

onde δt e δq$_k$ podem ser funções arbitrárias das coordenadas generalizadas. Já as velocidades generalizadas terão a seguinte transformação:

$$\dot{q}_k(t)\rightarrow\tilde{\dot{q}}_k\left(\tilde{t}\right)=\dot{q}_k(t)+\overline{\delta}\dot{q}_k. \tag{47}$$

Sob transformações do tipo (45), (46) e (47), a lagrangeana se transformará da seguinte maneira:

$$L\left(q_k(t),\dot{q}_k(t),t\right)\rightarrow L\left(\tilde{q}_k\left(\tilde{t}\right),\tilde{\dot{q}}_k\left(\tilde{t}\right),\tilde{t}\right) \tag{48}$$

A partir deste ponto, omitirei o subscrito k por simplicidade, ficando subtendido que ele subscreve cada coordenada generalizada. Três condições são assumidas a valer:

1. Estaremos considerando um espaço-tempo euclidiano;

2. A lagrangeana L tem a mesma forma funcional tanto em termo das quantidades transformadas quanto das quantidades originais, isto é, vale a expressão (48).

3. A magnitude da integral de ação é invariante sob a transformação

$$\widetilde{I} = \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}} \widetilde{L} d\widetilde{t} = \int_{t_0}^{t} L dt. \tag{49}$$

Isto representa uma extensão das propriedades das coordenadas ignoráveis. Se a lagrangeana não muda sob transformações nessas coordenadas não há motivo que ela possa assim alterar o valor da integral de ação I.

Combinando (18) e (19)

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}} \widetilde{L}\left(\widetilde{q}\left(\widetilde{t}\right), \widetilde{\dot{q}}_k\left(\widetilde{t}\right), \widetilde{t}\right) d\widetilde{t} - \int_{t_0}^{t} L\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right), t\right) dt = 0. \tag{50}$$

Na primeira integral $\widetilde{t}$ representa uma falsa variável de integração, podendo ser rebatizada de t, mas o domínio de integração não se altera. Omitiremos também a partir daqui os t's das coordenadas, assim

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}} \widetilde{L}\left(\widetilde{q}, \widetilde{\dot{q}}, \widetilde{t}\right) dt - \int_{t_0}^{t} L\left(q, \dot{q}, t\right) dt = 0. \tag{51}$$

Sob transformações infinitesimais do tipo (45) e (46), a diferença entre as integrais em (51) será

$$\begin{aligned} & \int_{t_0+\delta t_0}^{t+\delta t} \left[L + \delta L\right] dt - \int_{t_0}^{t} L dt \\ = & \int_{t_0}^{t} \delta L dt + \int_{t}^{t+\delta t} \left[L + \delta L\right] dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \left[L + \delta L\right] dt \end{aligned} \tag{52}$$

Em 1^a ordem os dois últimos termos em (52) podem ser escritos como:

$$\int_{t}^{t+\delta t} L dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} L dt = \delta t L\left(t\right) - \delta t_0 L\left(t_0\right) \tag{53}$$

Com isto, a equação (52) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0+\delta t_0}^{t+\delta t} \left[L + \delta L\right] dt - \int_{t_0}^{t} L dt &= \int_{t_0}^{t} \delta L dt + L\delta t \,\Big|_{t_0}^{t} \\ &= \int_{t_0}^{t} \left[\delta L\left(t\right) + \frac{d}{dt}\left(\delta t L\left(t\right)\right)\right] dt \end{aligned} \tag{54}$$

Vale a pena relembrar que

$$\delta L = L\left(\widetilde{q}, \widetilde{\dot{q}}, \widetilde{t}\right) - L\left(q, \dot{q}, t\right)$$

e, em 1^a ordem, podemos descrever esta diferença acima como

$$L\left(\tilde{\ }\right) - L\left(\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}\overline{\delta} q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\overline{\delta}\dot{q}_k\ , \tag{55}$$

onde $\overline{\delta}$ representa uma variação dos q_k's e de suas derivadas num ponto fixo do espaço, diferente da variação δ. Sendo assim, ela comuta com d/dt e a equação (55) fica

$$\delta L = L\left(\tilde{\ }\right) - L\left(\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\overline{\delta} q_k\right) \tag{56}$$

Substituindo (56) na eq. (54)

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\overline{\delta} q_k + \delta t L\left(t\right)\right] dt = 0, \tag{57}$$

que é uma forma de corrente conservada. As variações δ e $\overline{\delta}$e se relacionam da seguinte forma:

$$\delta q_k = \overline{\delta} q_k + \frac{\partial q_k}{\partial t}\delta t \tag{58}$$

Levando a expressão acima para a equação (57)

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right] dt = 0 \qquad (59)$$

Assim obtemos o resultado esperado

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\delta q_k\right] = 0 \qquad (60)$$

A equação (59) é a forma final do teorema de Noether, que relaciona as transformações de simetria na lagrangeana com suas equivalentes quantidades físicas conservadas. Deve ficar claro que o teorema na forma apresentada acima supõe que as três condições vistas no início da demonstração sejam válidas.

Referências

1. H.A. Buchdhal, L. J. Tassie, Austr. J. Phys. **17**, 431 (1964).
2. P. Havas, Acta Physica Austriaca **38**, 145 (1973).
3. E. L. Hill, Reviews of Modern Physics, vol. **23**, n 3.
4. L. Leblond, J. Marc, American Journal of Physics, vol. **23**, n 3.
5. E. Noether, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. K1. (1918), 235.
6. J. R. Schütz, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. K1. (1897), 110.